Algebra für Informatiker

Johannes Buchmann

24. November 1995

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Elementare Zahlentheorie

In diesem Kapitel werden wichtige Eigenschaften der ganzen Zahlen besprochen. Die Begriffe und Ergebnisse dieses Kapitels nehmen allgemeinere Begriffe und Ergebnisse, die im Lauf der Vorlesung eingeführt bzw. bewiesen werden, im Spezialfall vorweg. Sie dienen darum später als Beispielmaterial.

1.1 Natürliche Zahlen

Ich setze voraus, daß die Menge der natürlichen Zahlen bekannt ist. Diese Menge wird durch die Axiome von Peano charakterisiert, nämlich

1. 1 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl a hat einen Nachfolger a^+ in $\mathbb{N}$.
3. Es gibt keine natürliche Zahl mit dem Nachfolger 1.
4. Stimmen die Nachfolger zweier natürlicher Zahlen a und b überein, so gilt $a = b$.
5. Die einzige Menge von natürlichen Zahlen, die die Zahl 1 enthält und die mit jedem Element a auch dessen Nachfolger enthält, ist $\mathbb{N}$ selbst.

Das letzte Axiom heißt *Prinzip der vollständigen Induktion.* Dieses Prinzip wird benutzt, um Eigenschaften der natürlichen Zahlen zu beweisen und neue Begriffe zu definieren.

Man kann beispielsweise zeigen, daß sich auf genau eine Art jedem Paar x, y natürlicher Zahlen eine natürliche Zahl, x+y genannt, so zuordnen läßt, daß

$$x + 1 = x^+, \quad x \in \mathbb{N},$$

und

$$x + y^+ = (x + y)^+, x, y \in \mathbb{N}$$

gilt. Die Zahl $x+y$ heißt *Summe* von x und y. Statt a^+ schreibe ich ab sofort $a+1$. Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt das *Assoziativgesetz* nat 2

$$(a+b)+c = a+(b+c) \tag{1.1}$$

und das *Kommutativgesetz* nat 3

$$a+b = b+a. \tag{1.2}$$

Außerdem gilt: nat 4

$$\text{Aus } a+b = a+c \text{ folgt } b = c. \tag{1.3}$$

Statt $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ schreibt man kurz $\sum_{i=1}^{k} a_i$.

Weiter kann man jedem Paar x, y natürlicher Zahlen auf genau eine Weise ihr *Produkt* $x \cdot y$ oder xy so zuordnen, daß

$$x \cdot 1 = x, \quad x \in \mathbb{N}$$

und

$$x(y+1) = xy + x$$

gilt. Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt dann das *Assoziativgesetz* nat 5

$$(ab)c = a(bc), \tag{1.4}$$

das *Kommutativgesetz* nat 6

$$ab = ba \tag{1.5}$$

und das *Distributivgesetz* nat 7

$$a(b+c) = ab + ac. \tag{1.6}$$

Ferner gilt: nat 8

$$\text{Aus } ab = ac \text{ folgt } b = c \tag{1.7}$$

Dies nennt man *Kürzungsregel*. Statt $a_1 a_2 \cdots a_k$ schreibt man kurz $\prod_{i=1}^{k} a_i$. Ist hierbei $a_1 = a_2 = \ldots = a_k$ so schreibt man $a_1 a_2 \cdots a_k = a^k$.

Gilt $a = b + u$ für natürliche Zahlen a, b, u, so schreibt man $a > b$ oder $b < a$ und sagt, daß a größer als b ist oder daß b kleiner als a ist. Wiederum beweist man durch vollständige Induktion, daß genau eine der Relationen nat 9

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b \tag{1.8}$$

erfüllt ist. Weiter gilt für alle natürlichen Zahlen a, b, c nat 10

$$\text{Aus } a < b \text{ und } b < c \text{ folgt } a < c. \tag{1.9}$$

nat 11

$$\text{Aus } a < b \text{ folgt } a + c < b + c. \tag{1.10}$$

nat 12

$$\text{Aus } a < b \text{ folgt } ac < bc. \tag{1.11}$$

Ist $a > b$ so wird die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $a = b + u$ mit $a - b$ bezeichnet. Für "$a < b$ oder $a = b$" schreibt man kurz $a \leq b$. Für "$a > b$ oder $a = b$" schreibt man kurz $a \geq b$.

Weiter gilt der sogenannte Wohlordnungssatz. nat 1

1.1.1. Satz *Jede nicht leere Menge von natürlichen Zahlen enthält eine kleinste Zahl, d.h. eine solche, die kleiner ist als alle anderen Zahlen der Menge.*

Um mit natürlichen Zahlen rechnen zu können, braucht man eine *Darstellung*. Normalerweise benutzt man die Dezimaldarstellung. Computer verwenden die Binärdarstellung. Etwas allgemeiner führe ich hier die g-adische Darstellung ein, wobei g eine feste natürliche Zahl ungleich 1 ist. Man braucht zuerst g viele verschiedene Zeichen. Wenn $g = 2$ ist, also bei der Binärdarstellung, benutzt man die Zeichen $0, 1$. Wenn $g = 10$ ist, also bei der Dezimaldarstellung, nimmt man die Zeichen $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Wenn $g = 16$ ist, also bei der Hexadezimaldarstellung, benutzt man die Zeichen $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$. Sei Σ die Menge der g verschiedenen Zeichen. Mit Σ^* bezeichne ich die Menge aller endlichen Folgen von Zeichen aus Σ einschließlich der leeren Folge, für die ich ε schreibe. Die Elemente aus Σ^* heißen auch Strings über Σ. Den natürlichen Zahlen $a < g$ seien verschiedene Zeichen der Menge Σ zugeordnet. Die natürliche Zahl 1 wird durch das Zeichen 1 dargestellt. Zusätzlich gibt es noch das Zeichen 0 in Σ dem keine natürliche Zahl entspricht. Die Menge Σ enthält also immer die Zeichen $0, 1$. Die von 0 verschiedenen Elemente von Σ werden mit den durch sie dargestellten Zahlen identifiziert. Jedem String

$$s = s_1 s_2 \ldots s_k \in \Sigma^*, \quad k \geq 1, s_1 \neq 0$$

wird die natürliche Zahl

$$\sum_{\substack{i=1 \\ s_i \neq 0}}^{k} s_i g^{k-i}$$

zugeordnet. Dann wird jede natürliche Zahl durch genau einen String über Σ dargestellt.

1.2 Ganze Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen wird folgendermaßen zur Menge der ganzen Zahlen ergänzt. Man betrachtet die Menge aller Paare (a, b) von natürlichen Zahlen. Man stellt sich vor, daß (a, b) die ganze Zahl $a - b$ repräsentiert. Ganze Zahlen haben dann verschiedene Darstellungen. Um dem Rechnung zu tragen, werden Paare identifiziert, die dieselbe ganze Zahl darstellen. Zwei Paare (a, b) und (x, y) werden äquivalent genannt, wenn $a + y = x + b$ gilt. Dies ist eine Äquivalenzrelation. Die Menge der ganzen Zahlen ist die Menge der Äquivalenzklassen. Sie wird mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet.

Man definiert Addition, Multiplikation und Vergleich ganzer Zahlen folgendermaßen. Für natürliche Zahlen a, b, c, d setzt man

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$$

und man schreibt

$$(a, b) < (c, d) \text{ oder } (c, d) > (a, b), \text{ falls } a + d < b + c.$$

Man verifiziert leicht, daß diese Definitionen von der Wahl der Vertreter unabhängig sind.

Folgendermaßen werden einfachere Bezeichnungen für ganze Zahlen eingeführt. Alle Paare (a, a) gehören zu derselben Äquivalenzklasse. Für diese schreibt man 0. Ist $a > b$, so bezeichnet man die Äquivalenzklasse, die (a, b) enthält, mit $a - b$. Ist $a < b$, so schreibt man $-(b - a)$ für die Äquivalenzklasse, die (a, b) enthält. Es ist leicht zu sehen, daß diese Bezeichnungen wohldefiniert sind.

Man verifiziert leicht, daß die Rechengesetze (1.1) - (1.11) gelten. Außerdem hat für ganze Zahlen a, b die Gleichung $a = b + x$ stets eine eindeutig bestimmte Lösung x, die ebenfalls eine ganze Zahl ist. Für diese schreibt man auch $a - b$. Schließlich gilt $ab = 0$ genau dann, wenn a oder b gleich 0 ist.

Auch die Darstellung ganzer Zahlen wird von der Darstellung natürlicher Zahlen abgeleitet. Die Zahl 0 wird durch das Symbol 0 dargestellt. Es wurde ja vorausgesetzt, daß dieses Symbol zu dem Alphabet Σ gehört. Jede von 0 verschiedene ganze Zahl ist entweder eine natürliche Zahl oder $-a$ für eine natürliche Zahl a. Dies liefert unmittelbar die Darstellung der ganzen Zahlen. Bei der Binärdarstellung kann das Vorzeichen in einem weiteren Bit gespeichert werden. Die Anzahl der Bits, die nötig ist, um eine ganze Zahl z in Binärdarstellung zu speichern ist

$$\operatorname{size}(z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } z = 0 \\ \lfloor \log |z| \rfloor + 2 & \text{falls } z \neq 0. \end{cases}$$

1.3 Teilbarkeit

Nun werden elementare arithmetische Begriffe und Eigenschaften der ganzen Zahlen eingeführt. Eine ganze Zahl a heißt *Teiler* einer ganzen Zahl b, wenn es eine ganze Zahl g gibt, für die $b = ga$ gilt. Dafür schreibt man kurz $a \mid b$ (lies: a teilt b). Das Gegenteil wird mit $a \not| b$ (lies: a teilt nicht b) bezeichnet. Das Problem, zu entscheiden, ob a ein Teiler von b ist, wird im Zusammenhang mit der Division mit Rest angesprochen. teil 1

1.3.1. Übung Zeige, daß aus $a \mid b$ und $b \neq 0$ folgt, daß $|a| \leq |b|$ gilt.

Aus Übung 1.3.1 kann man folgende elementare Tatsachen ableiten. teil 2

$$\text{Jede ganze Zahl teilt } 0. \tag{1.12}$$

teil 3

$$\text{Die einzige von 0 geteilte Zahl ist } 0. \tag{1.13}$$

teil 4

$$\text{Die einzigen Teiler von 1 sind } \pm 1. \tag{1.14}$$

teil 5

$$\text{Genau dann gilt } a \mid b \text{ und } b \mid a, \text{ wenn } a = \pm b \text{ ist} \tag{1.15}$$

teil 6

$$\text{Jede ganze Zahl } a \text{ wird von } \pm 1 \text{ und von } \pm a \text{ geteilt.} \tag{1.16}$$

teil 7

$$\text{Aus } a \mid b \text{ und } b \mid c \text{ folgt } a \mid c. \tag{1.17}$$

teil 8

$$\text{Aus } a \mid b_i,\ 1 \leq i \leq k \text{ folgt } a \mid \textstyle\sum_{i=1}^{k} b_i c_i \text{ für alle } c_i,\ 1 \leq i \leq k. \tag{1.18}$$

Die ganze Zahl a wird *echter Teiler* von b genannt, wenn a ein Teiler von b ist und $a \neq \pm 1, \pm b$. Man sieht leicht ein, daß a genau dann ein echter Teiler von $b \neq 0$ ist, wenn a ein Teiler von b ist und $1 < |a| < |b|$ gilt. Eine *Primzahl* ist eine von 1 verschiedene natürliche Zahl, die keine echten Teiler hat. Die kleinste Primzahl ist 2. Alle anderen Primzahlen sind ungerade. Eine Primzahl, die eine ganze Zahl b teilt, heißt *Primteiler* von b. teil 9

1.3.2. Satz *Jede natürliche Zahl $a > 1$ besitzt wenigstens einen Primteiler.*

Beweis: Unter allen Teilern $r > 1$ wähle man den kleinsten aus. Dies geht nach dem Wohlordnungssatz. Der ausgewählte Teiler heiße t. Wenn t keine Primzahl ist, so besitzt t einen Teiler s mit $1 < s < t$. Nach (1.17) ist s auch ein Teiler von a und dies widerspricht der Wahl von t. □

teil 10

1.3.3. Satz *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Beweis: Angenommen, die Menge $\mathbb{P}$ aller Primzahlen ist endlich. Setze $a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p + 1$. Nach Satz 1.3.2 besitzt a einen Primteiler q. Wenn dieser mit einer Primzahl in $\mathbb{P}$ übereinstimmt, so gilt $q \mid 1 = a - \prod_{p \in \mathbb{P}} p$ nach (1.18). Dies ist aber wegen $q > 1$ unmöglich. □

Ein zentrales Thema der Zahlentheorie sind die Primzahlen. Es gibt sehr viele interessante algorithmische Probleme im Zusammenhang mit Primzahlen. Mit Hilfe des Siebs des Erathostenes (siehe [9], p.3) kann man z.B. alle Primzahlen unterhalb einer gegebenen Schranke aufzählen. Dies geht in polynomieller Zeit. Viel schwieriger ist es, zu entscheiden, ob eine gegebene natürliche Zahl eine Primzahl ist (siehe [9], Chapter 4, [3], Chapter 9). Es ist bis jetzt kein deterministischer Polynomzeitalgorithmus bekannt, der diese Entscheidung fällt. Es gibt aber effiziente probabilistische Verfahren. teil 11

1.3.4. Übung Ein *Primzahlzwilling* ist ein Paar (p, q) ungerader Primzahlen mit $q = p + 2$. Es ist nicht bekannt, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt. Man schreibe ein Programm, das alle Primzahlzwillinge unterhalb einer gegebenen Schranke ausgibt.

1.4 Division mit Rest und Komplexität aritmetischer Operationen

teil 13

1.4.1. Satz *Zu jedem Paar a, b ganzer Zahlen mit $b \neq 0$ gibt es genau ein Paar q, r ganzer Zahlen, das die Bedingungen*

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < |b|$$

erfüllt.

Beweis: Es genügt, den Fall $b > 0$ zu betrachten. Es ist dann zu zeigen, daß es genau eine ganze Zahl q gibt, für die $qb \leq a < q(b+1)$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit der Bedingung $q \leq a/b < q+1$, welcher genau eine ganze Zahl q genügt. □

Die *arithmetischen Operationen* für ganze Zahlen sind Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mit Rest. Schon aus der Schule sind Verfahren bekannt, wie man ganze Zahlen in Dezimaldarstellung addieren, subtrahieren, multiplizieren und mit Rest dividieren kann. Entsprechende Verfahren lassen sich für g-adisch dargestellte Zahlen mit beliebigem g angeben. Eine interessante Frage ist, wie schnell man die arithmetischen Operationen ausführen kann. Um diese Frage sinnvoll stellen zu können, muß man zuerst ein Berechnungsmodell festlegen, z.B. eine Turing-Maschine oder eine Random Access Maschine (RAM). Hier gehen ich davon aus, daß die ganzen Zahlen binär dargestellt sind. Unter der *Rechenzeit*, die ein Verfahren benötigt, verstehe ich die Anzahl der arithmetischen Operationen und Vergleiche von Bits, die innerhalb der Rechnung ausgeführt werden. Eine genauer beschriebenes Berechnungsmodell findet sich in [1].

Es ist klar, daß man zwei n-Bit Zahlen in Zeit $\mathrm{O}(n)$ addieren und subtrahieren kann. Bezeichnet man mit $M(n)$ die minimale Zeit, die für die Multiplikation zweier n-Bit Zahlen gebraucht wird und mit $D(n)$ die Zeit, die man braucht, um eine Zahl von höchstens $2n$ Bits durch eine n-Bit Zahl zu dividieren, so gilt der folgende, in [1] bewiesene Satz. div 1

1.4.2. Satz *Es gibt positive reelle Zahlen c und c' mit $cM(n) \leq D(n) \leq c'M(n)$.*

Dies bedeutet, daß Multiplikation und Division mit Rest im wesentlichen gleich schwere Probleme sind. In [1] wird außerdem folgendes bewiesen. div 2

1.4.3. Satz *$M(n) = \mathrm{O}(n \log n \log\log n)$.*

Der Beweis erfolgt, indem diese Laufzeitschranke für den Multiplikationsalgorithmus von Schönhage und Strassen gezeigt wird. Nennt man eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ *quasilinear*, wenn $f(n) = \mathrm{O}(n^{1+\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$ ist, so bedeutet Satz 1.4.3, daß man zwei ganze Zahlen in quasilinearer Laufzeit multiplizieren kann.

Diese Analysen geben zwar ein Gefühl von der Schwierigkeit der Multiplikation und Division von ganzen Zahlen. Sie beantworten aber nicht die Frage, welchen Algorithmus man in der Praxis verwenden soll. Dies kann man nur durch Bestimmung der O-Konstante und durch Experimente herausfinden. Aber auch dann hängt die Effizienz des verwendeten Verfahrens noch wesentlich von der Implementierung ab. So arbeitet Schönhage schon lange daran zu zeigen, daß sein Multiplikationsverfahren schon für relativ kleine Zahlen effizient ist. Siehe hierzu [10]. Für praktische Informationen und Implementierungshinweise siehe [6].

1.5 Größter gemeinsamer Teiler

ggT 1

1.5.1. Definition *Ein* gemeinsamer Teiler *einer Menge M von ganzen Zahlen ist eine ganze Zahl, die alle Elemente von M teilt. Ein gemeinsamer Teiler d von M heißt größter gemeinsamer Teiler von M, wenn er von allen anderen gemeinsamen Teilern von M geteilt wird und $d \geq 0$ gilt.*

ggT 2

1.5.2. Satz *Jede Menge M von ganzen Zahlen besitzt genau einen größten gemeinsamen Teiler. Enthält M ein von Null verschiedenes Element, so ist der größte gemeinsame Teiler die größte natürliche Zahl, die alle Elemente von M teilt.*

Beweis: Zuerst wird die Eindeutigkeit gezeigt. Seien d und d' zwei größte gemeinsame Teiler von M, dann ist nach Definition d ein Teiler von d' und d' ein Teiler von d. Also folgt aus (1.15), daß $d = d'$, weil beide nicht negativ sind.

Besteht M nur aus einem einzigen Element, so ist der Betrag dieses Elementes der größte gemeinsame Teiler von M. Jetzt wird die Existenz für den Fall nachgewiesen, daß M zwei Elemente a_1 und a_2 enthält. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß $a_2 > 0$ ist. Führe in folgender Weise Divisionen mit Rest durch:

$$a_1 = q_1 a_2 + a_3, 0 \leq a_3 < a_2$$

$$a_2 = q_2 a_3 + a_4, 0 \leq a_4 < a_3$$

$$a_3 = q_3 a_4 + a_5, 0 \leq a_5 < a_4$$

usw. Die Folge der Reste ist streng monoton fallend. Nach einer endlichen Anzahl von Schritten geht also die letzte Division mit Rest auf, d.h. man hat

$$a_{k-1} = q_{k-1} a_k + a_{k+1}, 0 < a_{k+1} < a_k$$

$$a_k = q_k a_{k+1} + 0.$$

Es wird nun behauptet, daß a_{k+1} ein größter gemeinsamer Teiler von a_1 und a_2 ist. Das beweist man so: Einerseits erkennt man beim Durchgang der Rekursionsgleichungen von unten nach oben, daß a_{k+1} alle a_i mit $i \leq k+1$ teilt. Andererseits sieht man beim Durchgang der Rekursionsgleichungen von oben nach unten, daß jeder gemeinsame Teiler von a_1 und a_2 alle a_i teilt für $1 \leq i \leq k+1$, insbesondere also a_{k+1}.

Wenn M nur endlich viele Elemente enthält, so beweist man die Existenz des größten gemeinsamen Teilers induktiv. Der größte gemeinsame Teiler einer unendlichen Menge M ist der kleinste unter den größten gemeinsamen Teilern $\neq 0$ der endlichen Teilmengen von M. $\square$

Als Abkürzung für "größter gemeinsamer Teiler" benutzt man "ggT". Sind $a_1, \ldots, a_k$ ganze Zahlen, so bezeichnet $\gcd(a_1, \ldots, a_k)$ den ggT von $\{a_1, \ldots, a_k\}$. ggT 3

1.5.3. Satz *Der ggT von ganzen Zahlen $a_1, \ldots, a_k$ ist eine ganzzahlige Linearkombination dieser Zahlen, d.h. es gibt ganze Zahlen $c_1, \ldots, c_k$ für die $\gcd(a_1, \ldots, a_k) = c_1 a_1 + \ldots + c_k a_k$ gilt.*

Beweis: Ich verwende die Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 1.5.2. Dort ist $\gcd(a_1, a_2) = a_{k+1} = a_{k-1} - q_{k-1} a_k$. Hierin kann man a_k ersetzen mittels $a_k = a_{k-2} - q_{k-2} a_{k-1}$. Setzt man dieses Verfahren fort, so folgt die Behauptung für $k = 2$. Für $k > 2$ zeigt man die Behauptung durch vollständige Induktion. □

Aus den Beweisen von Satz 1.5.2 und Satz 1.5.3 erhält man Algorithmen zur Berechnung des ggT zweier Zahlen und zur Bestimmung der Koeffizienten in der Darstellung dieses ggT als ganzzahlige Linearkombination. Hier sind die Algorithmen. ggT 4

1.5.4. Algorithmus

Euklidischer Algorithmus

EINGABE: Ganze Zahlen a, b.
AUSGABE: $d = \gcd(a, b)$

(1) $d = \max\{|a|, |b|\}$, $r = \min\{|a|, |b|\}$
(2) **while** $(r \neq 0)$ **do**
(3) $\quad h = r;\ r = d - \lfloor d/r \rfloor r;\ d = h$
(4) **od**

ggT 5

1.5.5. Algorithmus

Erweiterter Euklidischer Algorithmus

Eingabe: Ganze Zahlen a, b
Ausgabe: $d = \gcd(a, b)$ und ganze Zahlen e, f mit $d = ae + bf$

(1) **if** $(|a| \geq |b|)$ **then**
(2) $\quad d = |a|;\ r = |b|,\ e = \mathrm{sign}(a),\ e' = 0,\ f = 0,$
$\quad f' = \mathrm{sign}(b)$
(3) **else**
(4) $\quad d = |b|,\ r = |a|,\ f = \mathrm{sign}(b),\ f' = 0,\ e = 0,$
$\quad e' = \mathrm{sign}(a)$
(5) **fi**
(6) **while** $(r \neq 0)$ **do**
(7) $\quad q = \lfloor d/r \rfloor$
(8) $\quad \begin{pmatrix} d & r \\ e & e' \\ f & f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & r \\ e & e' \\ f & f' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q \end{pmatrix}$
(9) **od**

Den Beweis folgender Resultate findet man in [2] ggT 6

1.5.6. Satz *Seien a, b zwei ganze Zahlen mit $|a| \geq |b| > 1$.*

1. *Die Anzahl der Iterationen in Algorithmus 1.5.4 und Algorithmus 1.5.5 ist höchstens* $\log |b| / \log((1 + \sqrt{5})/2) + 1$.

2. *Die Laufzeit von Algorithmus 1.5.4 und Algorithmus 1.5.5 ist* $\mathrm{O}(\mathrm{size}(a)\,\mathrm{size}(b))$.

3. *Für die Koeffizienten e und f, die in Algorithmus 1.5.5 berechnet werden, gilt $|e| \leq |b|/(2\gcd(a, b))$ und $|f| \leq |a|/(2\gcd(a, b))$. Gilt ferner $\gcd(a, b) = e'a + f'b$ für zwei ganze Zahlen e' und f', so folgt $|e'| \geq e$ und $|f'| \geq f$.*

Außerdem wird in [1] folgender Satz bewiesen. ggT 7

1.5.7. Satz *Ist $M(n)$ die Zeit, die man zur Multiplikation zweier n-Bit Zahlen benötigt, so gibt es einen Algorithmus, der den ggT zweier n-Bit Zahlen mit Darstellung in Zeit $\mathrm{O}(M(n) \log n)$ berechnet.*

Mit diesem Satz und Satz 1.4.3 erhält man folgendes Ergebnis. ggT 8

1.5.8. Satz *Der ggT zweier n-Bit Zahlen mit Darstellung kann in Zeit $\mathrm{O}(n \log^2 n \log\log n)$ bestimmt werden.*

Wendet man obige Algorithmen iteriert an, so kann man damit auch den ggT mit Darstellung von k Zahlen berechnen. Die Koeffizienten dieser Darstellung sind dann aber alles andere als optimal. Man kann sogar zeigen, daß das Problem, einen bezüglich der Maximumnorm minimalen Koeffizientenvektor zu finden, NP-vollständig ist (siehe [5]).

1.6 Eindeutige Primfaktorzerlegung

primfact 1

1.6.1. Satz *1. Aus $a \mid bc$ und $\gcd(a,b) = 1$ folgt $a \mid c$.*

2. Teilt eine Primzahl ein Produkt ganzer Zahlen, so teilt sie wenigstens einen Faktor.

Beweis: Nach Satz 1.5.3 ist $1 = ae + bf$ mit ganzen Zahlen e, f. Daher ist $c = a(ce) + (bc)f$. Hieraus folgt $a \mid c$.

Für zwei Faktoren folgt die zweite Behauptung aus der ersten. Für mehr als zwei Faktoren durch vollständige Induktion. □

primfact 2

1.6.2. Satz *Jede natürliche Zahl $a > 1$ ist ein Produkt von Primzahlen. Die Zerlegung in Primfaktoren ist bis auf die Reihenfolge eindeutig.*

Beweis: Die Existenz der Primfaktorzerlegung von a wird durch vollständige Induktion gezeigt. Für $a = 2$ ist die Behauptung wahr. Sei $a > 2$ und sei a keine Primzahl. Nach Satz 1.3.2 besitzt a einen Primfaktor p. Sei $b = a/p$. Dann ist $1 < b < a$ und nach Induktionsannahme ist b ein Produkt von Primzahlen, und das beweist die Behauptung.

Seien $p_1 p_2 \cdots p_r = a = q_1 q_2 \cdots q_s$ zwei Primfaktorzerlegungen von a, wobei r minimal sei. Ich führe den Beweis durch vollständige Induktion über r. Ist $r = 1$, so muß $s = 1$ und $q_1 = p_1$ sein, weil Primzahlen keine nichttriviale Zerlegung besitzen. Sei $r > 1$. Dann ist nach Satz 1.6.1 p_r ein Teiler eines der q_i und damit ist $p_r = q_i$ für ein i. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $p_r = q_s$, also $p_1 \cdots p_{r-1} = q_1 \cdots q_{s-1}$. Nach Induktionsannahme sind diese Zerlegungen bis auf die Reihenfolge gleich, und das beweist die Behauptung. □

Nach Satz 1.6.2 kann man für jede von 0 verschiedene ganze Zahl a

$$a = \pm \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{e(p,a)}$$

schreiben. Dies definiert also eine Abbildung

$$\mathbb{P} \times \mathbb{Z} - \{0\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad (p,a) \mapsto e(p,a).$$

primfact 3

1.6.3. Übung Man zeige, daß für ganze Zahlen $a, b, a_1, \ldots, a_k \neq 0$ gilt:

1. Für alle Primzahlen p gilt $e(p, ab) = e(p,a) + e(p,b)$.

2. a teilt b genau dann, wenn $e(p,a) \leq e(p,b)$ gilt für alle Primzahlen p.
3. Es gilt $a = \pm b$ genau dann, wenn $e(p,a) = e(p,b)$ ist für alle Primzahlen p.
4. $\gcd(a_1, \ldots, a_k) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min\{e(p,a_i):1 \leq i \leq k\}}$.

Die Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl tatsächlich zu finden, ist sehr schwer. Es ist kein polynomialer Algorithmus bekannt, der dieses Problem löst. Siehe hierzu [9].

Ändert man das Berechnungsmodell und verwendet einen sogenannten Quantencomputer, also einen Computer, der die Gesetze der Quantenmechanik ausnutzt, so kann man tatsächlich in Polynomzeit faktorisieren. Zitat ergänzen. Es ist aber noch nicht klar, ob man einen solchen Computer wirklich bauen kann.

1.7 Kongruenzen

Sei m eine natürliche Zahl. cong 1

1.7.1. Definition *Zwei ganze Zahlen a und b heißen* kongruent *modulo m, wenn m die Differenz $b - a$ teilt. Man schreibt $a \equiv b \bmod m$.*

cong 2

1.7.2. Übung Zeige, daß genau dann $a \equiv b \bmod m$ gilt, wenn a und b denselben Rest bei der Division durch m lassen.

cong 3

1.7.3. Satz *Kongruenz modulo m ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.*

Die Äquivalenzklasse von a heißt *Restklasse* von a mod m. Ich bezeichne sie mit $a \operatorname{Mod} m$. Aus Satz 1.4.1 folgt, daß $a \operatorname{Mod} m$ genau einen Vertreter r enthält mit $0 \leq r < a$. Dieser wird *kleinster nichtnegativer Rest* von a mod m genannt. Es ist auch leicht einzusehen, daß es genau einen Vertreter r in $a \operatorname{Mod} m$ gibt mit $-m/2 < r \leq m/2$. Das ist der *absolut kleinste Rest* von a mod m. Die Restklassen mod m kann man also durch einen dieser Reste eindeutig darstellen. Für jedes a kann man beide Reste in quasilinearer Zeit ausrechnen. Daher kann man in quasilinearer Zeit entscheiden, ob für zwei ganze Zahlen a und b die Restklassen $a \operatorname{Mod} m$ und $b \operatorname{Mod} m$ übereinstimmen. Dies ist nicht selbverständlich. es gibt Äquivalenzrelationen, z.B. die Äquivalenz von indefiniten binären quadratischen Formen, für die kein polynomieller Entscheidungsalgorithmus bekannt ist. cong 2.1

1.7.4. Satz *Kongruenz mod m ist verträglich mit der Addition, Subtraktion und Multiplikation, d.h. aus $a \equiv a' \bmod m$ und $b \equiv b' \bmod m$ folgt $a + b \equiv a' + b' \bmod m$, $a - b \equiv a' - b' \bmod m$, $ab \equiv a'b' \bmod m$.*

Mit Satz 1.7.3 definiert man Addition, Subtraktion und Multiplikation von Restklassen so:

$$\begin{aligned} a \operatorname{Mod} m + b \operatorname{Mod} m &= (a+b) \operatorname{Mod} m, \\ a \operatorname{Mod} m - b \operatorname{Mod} m &= (a-b) \operatorname{Mod} m, \\ a \operatorname{Mod} m \cdot b \operatorname{Mod} m &= (ab) \operatorname{Mod} m. \end{aligned}$$

Es gelten dieselben Rechengesetze wie bei ganzen Zahlen. Stellt man Restklassen durch die kleinsten nichtnegativen Reste dar, so addiert man Restklassen, indem man die Vertreter addiert und dann mod m reduziert. Entsprechend subtrahiert und multipliziert man Restklassen. Dies geht in quasilinearer Zeit. In der Praxis ist das Rechnen mit Restklassen aber erheblich zeitaufwendiger als das Rechnen mit ganzen Zahlen, weil die O-Konstante mehr als doppelt so groß ist.

Satz 1.7.3 ist sehr nützlich bei der Rechnung mit Kongruenzen. Will man z.B. den Rest einer ganzen Zahl

$$a = \sum_{i=1}^{k} a_i 10^{k-i}$$

mod 11 bestimmen, so benutzt man

$$10^{k-i} \equiv (-1)^{k-i} \bmod 11$$

und erhält

$$a \equiv \sum_{i=1}^{k} a_i (-1)^{k-i} \bmod 11.$$

Der Ausdruck $\sum_{i=1}^{k} a_i(-1)^{k-i}$ heißt *alternierende Quersumme* von a. Um Teilbarkeit von a durch 11 festzustellen, braucht man nur zu prüfen, ob die alternierende Quersumme von a durch 11 teilbar ist.

Division mod m ist nicht immer möglich, wie der folgende Satz zeigt. cong 4

1.7.5. Satz *Genau dann gibt es eine ganze Zahl a' mit $aa' \equiv 1 \bmod m$, falls $\gcd(a,m) = 1$ ist.*

Beweis: Ist $\gcd(a,m) = 1$, so gibt es nach Satz 1.5.3 ganze Zahlen a', c mit $1 = aa' + cm$ also $aa' \equiv 1 \bmod m$.

Gilt $aa' \equiv 1 \bmod m$ so gibt es eine ganze Zahl c mit $aa' + cm = 1$. Also ist $\gcd(a,m) = 1$. $\square$

Gilt $\gcd(a,m) = 1$ so heißt $a \operatorname{Mod} m$ *prime Restklasse* mod m. Gilt $aa' \equiv 1 \bmod m$ so schreibe ich auch $a' \equiv a^{-1} \bmod m$ und $(a \operatorname{Mod} m)^{-1} = a' \operatorname{Mod} m$. Es gilt noch folgende Kürzungsregel. cong 5

1.7.6. Satz *Ist $\gcd(a,m) = 1$ so folgt aus $ab \equiv ac \bmod m$, daß auch $b \equiv c \bmod m$ gilt.*

Beweis: Wähle a' mit $aa' \equiv 1 \bmod m$ und erhalte $b \equiv a'ab \equiv aa'c \equiv c \bmod m$. □

Um eine prime Restklasse mod m zu invertieren, muß man den ggT mit Darstellung des Vertreters mit m berechnen. Dies geht auch in quasilinearer Zeit. Division durch prime Restklassen geht also auch in quasilinearer Zeit.

Kapitel 2

Gruppen

2.1 Algebraische Struktur

algstr 1

2.1.1. Definition *Es seien X ud Y Mengen. Eine Abbildung $f : X \times X \to X$ heißt* innere Verknüpfung *auf X. Eine Abbildung $g : X \times Y \to X$ heißt* äußere Verknüpfung *auf X mit* Operatorenbereich Y*. Ein Tupel $(X, f_1, \dots, f_n, Y_1, g_1, \dots, Y_m, g_m)$ bestehend aus einer nicht leeren Menge X, inneren Verknüpfungen f_i auf X, $1 \leq i \leq n$, und äußeren Verknüpfungen g_j auf X mit nicht leerem Operatorenbereich Y_j, $1 \leq j \leq m$ heißt eine* algebraische Struktur*.*

Ist f eine innere Verknüpfung auf einer Menge X, so schreibt man xfy statt $f(x, y)$. Zum Beispiel sind Addition und Multiplikation Verknüpfungen auf der Menge der ganzen Zahlen und auch auf der Menge der Restklassen mod m für jede natürliche Zahl m. Andere Beispiele für innere Verknüpfungen auf Mengen sind die Konkatenation auf der Menge aller Strings über einem endlichen Alphabet und die logischen Verknüpfungen $\vee$ und $\wedge$ auf der Menge $\{0, 1\}$. algstr 2

2.1.2. Übung Sei m eine natürliche Zahl. Zeige, daß die Multiplikation von Restklassen eine Verknüpfung auf der Menge der primen Restklassen mod m ist. Zeige auch, daß die Addition von Restklassen keine Verknüpfung auf dieser Menge ist.

algstr 3

2.1.3. Beispiel Eine äußere Verknüpfung auf der Menge aller Restklassen nach einem natürlichen Modul m mit Operatorbereich $\mathbb{N}$ ist die *Potenzierung*

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \quad (x \operatorname{Mod} m, n) \mapsto x^n \operatorname{Mod} m.$$

Für die Menge der primen Restklassen mod m kann man diese Verknüpfung sogar auf den Operatorbereich $\mathbb{Z}$ fortsetzen.

Innere Verknüpfungen auf einer endlichen Menge $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ kann man durch eine *Verknüpfungstafel* angeben. Folgende Verknüpfungstafel beschreibt z.B. die Multiplikation auf $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

algstr 4

2.1.4. Definition *Seien* $(X, \top_1, \ldots, \top_n, Y_1, \perp_1, \ldots, Y_m, \perp_m)$ *und* $(U, \vee_1, \ldots, \vee_n, Y_1, \wedge_1, \ldots, Y_m, \wedge_m)$ *algebraische Strukturen mit gleicher Anzahl innerer und äußerer Verknüpfungen und gleichen Operatorbereichen. Eine Abbildung* $f : X \to U$ *heißt* Homomorphismus *der ersten Struktur in die zweite, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt.*

1. $f(a \top_i b) = f(a) \vee_i f(b)$ *für alle* $a, b \in X$ *und* $1 \leq i \leq n$.
2. $f(y \perp_i a) = y \wedge_i f(a)$ *für alle* $y \in Y_i$, $a \in X$ *und* $1 \leq i \leq m$.

Hier sind noch ein paar andere Bergriffe. Injektive Homomorphismen heißen *Monomorphismen*, surjektive Homomorphismen heißen *Epimorphismen*, bijektive Homomorphismen heißen *Ismorphismen*. Homomorphismen einer algebraischen Struktur in sich selbst heißen *Endomorphismen*, bijektive Endomorphismen heißen *Automorphismen*. algstr 5

2.1.5. Beispiel Sei m eine natürliche Zahl. Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \quad a \to a \operatorname{Mod} m$$

ein Epimorphismus von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ in $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \ldots)$.

algstr 6

2.1.6. Definition *Eine innere Verknüpfung* $\circ : X \times X \to X$ *heißt* assoziativ, *wenn* $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ *gilt für alle* $a, b, c \in X$. *Sie heißt* kommutativ, *wenn* $a \circ b = b \circ a$ *gilt für alle* $a, b \in X$.

Es soll gezeigt werden, daß bei einer assoziativen Verknüpfung das Ergebnis einer Verknüpfung von n Elementen von der Klammerung unabhängig ist. algstr 7

2.1.7. Definition *Sei eine innere Verknüpfung* $\circ : X \times X \to X$ *und eine Folge* $(x_1, \ldots, x_n)$ *von Elementen aus* X *vorgegeben. Die* Verknüpfungen *dieser Folge (bezüglich* $\circ$*) sind induktiv folgendermaßen definiert.*

1. *Ist* $n = 1$ *so ist* x_1 *die einzige Verknüpfung der Folge.*
2. *Ist* $n > 1$, $1 \leq i < n$, *ist* u *eine Verknüpfung von* $(x_1, \ldots, x_i)$ *und* v *eine Verknüpfung von* $(x_{i+1}, \ldots, x_n)$, *so ist* $u \circ v$ *eine Verknüpfung von* $(x_1, \ldots, x_n)$.

algstr 8

2.1.8. Satz *Ist $\circ$ eine assoziative Verknüpfung auf der Menge X und ist f eine endliche Folge von Elementen von X, so sind alle Verknüpfungen von f gleich.*

Beweis: Der Beweis wird durch Induktion über die Länge von f geführt. $\square$

Die einzige Verknüpfung von $f = (x_1, \ldots, x_n)$ in Satz 2.1.8 wird mit

$$\bigcirc_{i=1}^{n} x_i$$

bezeichnet.

2.2 Halbgruppen

halb 1

2.2.1. Definition *Eine* Halbgruppe *ist ein Paar $(H, \circ)$, bestehend aus einer nichtleeren Menge H und einer assoziativen inneren Verknüpfung $\circ$ auf H.*

halb 1.1

2.2.2. Beispiel 1. Das Paar $(\mathbb{N}, +)$ ist eine Halbgruppe.

2. Ist Σ ein Alphabet, so ist $(\Sigma^*, \circ)$ eine Halbgruppe, wobei $\circ$ die Konkatenation von Strings bedeutet.

In einer Halbgruppe $(H, \circ)$ definiert man zu jedem Element $a \in H$ und jeder natürlichen Zahl n die *n-te Potenz*, indem man $a^1 = a$ und $a^{n+1} = a \circ a^n$ setzt. halb 2

2.2.3. Satz *Für $a \in H$ und $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $a^n \circ a^m = a^{n+m}$ sowie $(a^n)^m = a^{nm}$.*

Berechnet man a^n durch sukzessive Multiplikation, so braucht man dafür $n - 1$ Multiplikationen in H. Man kann Satz 2.2.3 benutzen, um diese Berechnung wesentlich zu beschleunigen. Hierzu schreibt man den Exponenten n in Binärdarstellung auf, d.h. als

$$n = \sum_{i=0}^{k} b_i 2^{k-i}.$$

Nach Satz 2.2.3 gilt dann

$$a^n = \bigcirc_{\substack{i=0 \\ b_i=1}}^{k} (a^{2^{k-i}}) = \bigcirc_{\substack{i=0 \\ b_{k-i}=1}}^{k} (a^{2^i}).$$

Dies legt es nahe, die Potenzen a^{2^i} zu berechnen für $1 \leq i \leq k$ und a^n als Produkt der entsprechenden a^{2^i} zu bestimmen. Hierbei beachte man, daß

$$a^{2^{i+1}} = (a^{2^i})^2$$

ist.

Dies führt zu folgendem Algorithmus. halb 3

2.2.4. Algorithmus

Schnelle Exponentiation

EINGABE: $a \in H$, $n \in \mathbb{N}$
AUSGABE: $b = a^n$

```
b = a; n = n − 1; c = a;
while (n > 0) do
   if (n ≡ 1 mod 2) then
      b = b ∘ c; n = n − 1;
   fi
   n = n/2; c = c²;
od
```

halb 4

2.2.5. Satz *Algorithmus 2.2.4 benötigt höchstens* $2\lfloor \log n \rfloor + 2$ *Multiplikationen in* H.

halb 5

2.2.6. Übung Eine Variante der schnellen Exponentiation in Halbgruppen beruht auf folgender Formel

$$g^n = \begin{cases} (g^{n/2})^2 & \text{für } n \equiv 0 \bmod 2 \\ g \cdot (g^{(n-1)/2})^2 & \text{für } n \not\equiv 0 \bmod 2 \end{cases} .$$

Man gebe den entsprechenden Algorithmus an und analysiere ihn.

Exponentiation in $(H, \circ)$ kann zu kryptographischen Zwecken verwendet werden. Wollen sich zwei Kommunikationspartner A und B über eine unsichere Leitung auf einen geheimen Schlüssel einigen, so einigen sie sich öffentlich auf ein Element $h \in H$. Dann wählt A einen geheimen Exponenten a, bestimmt $\alpha = h^\alpha$ und schickt α an B. B wählt einen geheimen Exponenten b, bestimmt $\beta = h^\beta$ und schickt β an A. Danach bestimmt A das Element $\beta^a = (h^b)^a = h^{ab}$ und B bestimmt das Element $\alpha^b = (h^a)^b = h^{ab}$. Beide haben also dasselbe Element h^{ab}, das sie als Schlüssel verwenden. Man beachte, daß hier mehrfach die Potenzgesetze aus Satz 2.2.3 verwendet wurden. Ein Lauscher kennt H, h, α, β. Hieraus h^{ab} zu berechnen, bezeichnet man als das *Diffie-Hellman-Problem* in H nach den Erfindern dieses Verfahrens Diffie und Hellman (siehe [4]). Der Lauscher könnte h^{ab} ermitteln, wenn er die Exponenten a und b bestimmen könnte. Der Exponent a heißt *diskreter Logarithmus* von α zur Basis h. Es ist klar, daß das Diffie-Hellman-Problem höchstens so schwer ist, wie das Problem, in H diskrete Logarithmen zu berechnen. Die Umkehrung ist nicht bekannt und gehört zu den wichtigen offenen Problemen der Kryptoanalyse. In der Praxis wird vor allem die multiplikative Halbgruppe der primen Restklassen nach einem großen Primzahlmodul p verwendet. Hat p mehr als 200 Dezimalstellen und $p-1$ nicht zu kleine Faktoren, so gelten obige Probleme zur Zeit als unlösbar.

2.3 Direkte Produkte

Es sei I eine nicht leere Menge, die hier als Indexmenge gebraucht wird. Es sei $\{(H_\alpha, \top_\alpha)\}$ eine Familie von Halbgruppen. Auf dem mengentheoretischen direkten Produkt

$$\prod_{\alpha \in I} H_\alpha = \{f | f : I \to \cup_{\alpha \in I} H_\alpha \text{ mit } f(\alpha) \in H_\alpha\}$$

definiert man komponentenweise eine innere Verknüpfung

$$\top : \prod_{\alpha \in I} H_\alpha \times \prod_{\alpha \in I} H_\alpha \to \prod_{\alpha \in I} H_\alpha$$

durch

$$(f \top g)(\alpha) = f(\alpha) \top_\alpha g(\alpha).$$

Diese Verknüpfung ist assoziativ. Also ist $(\prod_{\alpha \in I} H_\alpha, \top)$ eine Halbgruppe. Sie heißt *direktes Produkt* der Halbgruppen $\{(H_\alpha, \top_\alpha)\}$.

Analog werden direkte Produkte beliebiger algebraischer Strukturen definiert.

2.4 Faktorhalbgruppen

In diesem Abschnitt sei $(H, \circ)$ eine Halbgruppe und R eine Äquivalenzrelation auf H. fakthg 1

2.4.1. Definition *Die Äquivalenzrelation R heißt mit der Verknüpfung $\circ$* linksverträglich *bzw.* rechtsverträglich, *wenn für alle $(x, y) \in R$ und alle $a \in H$ auch $(a \circ x, a \circ y)$ bzw. $(x \circ a, y \circ a)$ in R liegt. Die Relation R heißt verträglich mit $\circ$, wenn sie linksverträglich und rechtsverträglich mit $\circ$ ist.*

fakthg 2

2.4.2. Beispiel Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und $\circ$ die Konkatenation auf Σ^*. Wir betrachten die Halbgruppe $(\Sigma^*, \circ)$. Wir nennen zwei Strings in Σ^* äquivalent, wenn sie gleich lang sind. Dies ist eine Äquivalenzrelation, die mit $\circ$ verträglich ist.

fakthg 3

2.4.3. Übung Betrachte die Halbgruppe der $(\mathbb{Z}^{n\times n}, \cdot)$. Wir nennen zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ äquivalent, wenn es eine Matrix $U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ gibt mit $\det U = 1$ und $A = UB$. Zeige, daß dies eine Äquivalenzrelation ist. Untersuche, ob die Äquivalenzrelation mit $\cdot$ verträglich ist.

fakthg 4

2.4.4. Satz *Genau dann ist $\circ$ mit R verträglich, wenn mit $(x, y), (u, v) \in R$ auch $(x \circ u, y \circ v)$ zu R gehört.*

Beweis: Sind die angegebenen Bedingungen erfüllt, so ist R mit $\circ$ verträglich, weil man $(x, y) = (a, a)$ und $(u, v) = (a, a)$ setzen kann.

Sei R mit $\circ$ verträglich und $(x, y), (u, v) \in R$. Dann gilt $(x \circ u, y \circ u) \in R$ und $(y \circ u, y \circ v) \in R$. Daher folgt aus der Transitivität von R, daß auch $(x \circ u, y \circ v)$ zu R gehört. □

Die Äquivalenzklasse von $a \in H$ wird mit $[a]_R$ oder kurz $[a]$ bezeichnet. Die Menge aller Äquivalenzklassen wird H/R geschrieben. fakthg 5

2.4.5. Satz *Sei R verträglich mit $\circ$. Definiert man $[a] \circ [b] = [a \circ b]$ für $a, b \in H$, so ist $(H/R, \circ)$ eine Halbgruppe.*

Beweis: .... □

Die in Satz 2.4.5 konstruierte Halbgruppe heißt *Faktorhalbgruppe* oder *Restklassenhalbgruppe* von R nach H.

2.5 Neutrale Elemente

Wieder sei $(H, \circ)$ eine Halbgruppe. neutr 1

2.5.1. Definition *Ein Element $e \in H$ heißt* rechtsneutrales *bzw.* linksneutrales Element *der Halbgruppe, wenn $a \circ e = a$ bzw. $e \circ a = a$ gilt für alle $a \in H$. Ist e zugleich rechtsneutrales und linksneutrales Element der Halbgruppe, so heißt e* neutrales Element *der Halbgruppe.*

neutr 2

2.5.2. Beispiel Betrachte die Menge H aller 2×2-Matrizen mit ganzzahligen Einträgen, in denen beide Einträge in der zweiten Spalte 0 sind. Zusammen mit der Matrixmultipliaktion ist das eine Halbgruppe. Diese Halbgruppe besitzt kein linksneutrales Eelement und das rechtsneutrale Element

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

neutr 3

2.5.3. Satz *Ist e ein linksneutrales und f ein rechtsneutrales Element der Halbgruppe, so ist $e = f$. Insbesondere besitzen Halbgruppen höchstens ein neutrales Element.*

Beweis: Es gilt $e = e \circ f = f$. □

2.6 Invertierbare Elemente

Wieder $(H, \circ)$ eine Halbgruppe mit neutralem Element e. inv 1

2.6.1. Definition *Ein Element $a \in H$ heißt* linksinvertierbar *bzw.* rechtsinvertierbar *in der Halbgruppe, wenn es $b \in H$ gibt mit $b \circ a = e$ bzw. $a \circ b = e$. Ein links- und rechtsinvertierbares Element heißt invertierbar.*

inv 2

2.6.2. Satz *Ist $a \in H$ invertierbar mit Linksinversem b und Rechtsinversem b', dann gilt $b = b'$.*

Beweis: $b = b \circ e = b \circ (a \circ b') = (b \circ a) \circ b' = b'$. □

Die Menge der invertierbaren Elemente in H wird mit H^* bezeichnet. Ihre Elemente heißen *Einheiten* von H. Man beachte, daß die Definition von H^* von der Verknüpfung $\circ$ abhängt. inv 3

2.6.3. Beispiel Betrachte die Halbgruppe $(\mathbb{Z}, \cdot)$. Dann ist $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$. Betrachte die Halbgruppe $(\{x + y\sqrt{5} : x, y \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$. In dieser Halbgruppe ist z.B. $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ invertierbar mit dem Inversen $\alpha' = (-1 + \sqrt{5})/2$. Außerdem sind alle Potenzen von $\pm\alpha$ und $\pm\alpha'$ invertierbar. Andere invertierbare Elemente gibt es in dieser Halbgruppe nicht.

2.7 Gruppen

gruppe 1

2.7.1. Definition *Eine Halbgruppe $(H, \cdot)$ heißt* Gruppe*, wenn sie ein linksneutrales Element e besitzt und wenn es für alle $a \in H$ ein $b \in H$ gibt mit $b \cdot a = e$.*

gruppe 2

2.7.2. Satz *Gilt $a^2 = a$ für ein Element a einer Gruppe $(G, \cdot)$ mit linksneutralem Element e, dann ist $a = e$.*

Beweis: Sei $b \in G$ mit $ba = e$. Dann gilt $a = ea = (ba)a = b(a^2) = ba = e$. □

gruppe 3

2.7.3. Satz *Eine Halbgruppe $(G, \cdot)$ ist genau dann eine Gruppe, wenn sie genau ein neutrales Element enthält und alle Elemente von G invertierbar sind.*

Beweis: Wir müssen nur zeigen, daß Gruppen die obigen Eigenschaften haben. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit linksneutralem Element e. Sei $a, b \in G$ mit $ba = e$. Dann gilt $(ab)(ab) = a(ba)b = aeb = ab$. Also ist $ab = e$ nach Satz 2.7.2. Weiter gilt $a = ea = (ab)a = a(ba) = ae$. Also ist e auch rechtsneutrales Element. Aus Satz 2.5.3 folgt, daß e das eindeutig bestimmte neutrale Element von G ist. □

Das Inverse eines Elementes a einer Gruppe G bezeichnet man mit a^{-1}. gruppe 4

2.7.4. Satz *Ist $(H, \circ)$ eine Halbgruppe mit neutralem Element e, so ist $(H^*, \circ)$ eine Gruppe.*

Sei in Zukunft $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. gruppe 5

2.7.5. Satz *Für $a, a_1, \ldots, a_n \in G$ gelten folgende Rechengesetze.*

1. $(a^{-1})^{-1} = a$.
2. $(a_1 a_2 \cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}$.
3. $(a^{-1})^m = (a^m)^{-1}$.

Setzt man $a^0 = e$ und $a^{-n} = (a^{-1})^n$, so folgen aus Satz 2.7.5 die üblichen Potenzgesetze. gruppe 6

2.7.6. Satz *Eine Halbgruppe $(H, \cdot)$ ist genau dann eine Gruppe, wenn es zu je zwei Elementen a, b Elemente x, y gibt mit $ax = b$ und $ya = b$.*

Die folgenden Rechengesetze werden als *Kürzungsregeln* bezeichnet. gruppe 7

2.7.7. Satz *Für alle $a, b, c \in G$ folgt aus $ac = bc$, daß auch $a = b$ gilt und aus $ca = cb$, daß auch $a = b$ gilt.*

Ist G endlich, so heißt die Elementanzahl von G auch *Ordnung* von G. Ist $\cdot$ kommutativ, so heißt die Gruppe G *kommutativ* oder *abelsch*.

2.8 Beispiele von Gruppen

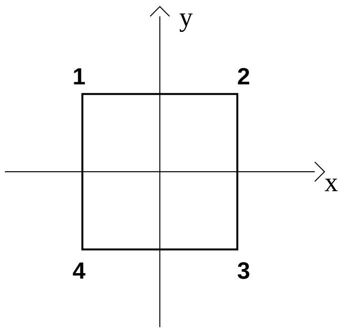
Bekannt sind schon folgende abelsche Gruppen: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$, $((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*, \cdot)$ für $m \in \mathbb{N}$. Letzere Gruppe heißt *prime Restklassengruppe* mod m.

Die Menge der Permutationen $S(X)$ einer nicht leeren Menge X ist zusammen mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe. Sie heißt *symmetrische Gruppe* von X. Die symmetrische Gruppe von $\{1, \ldots, n\}$ bezeichnet man auch als S_n und nennt sie *symmetrische Gruppe der Stufe* n. beispgr 1

2.8.1. Satz *Es gilt $|S_n| = n!$.*

Unter einer *Bewegung* des $\mathbb{R}^n$ versteht man eine Permutation des $\mathbb{R}^n$, die die Abstände zwischen zwei Punkten unverändert läßt. Die *Symmetrien* einer Teilmenge F des $\mathbb{R}^n$ sind die Bewegungen f des $\mathbb{R}^n$, die F in sich selbst abbilden, d.h. für die $f(F) = F$ gilt. Die Symmetrien von F bilden zusammen mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die *Symmetriegruppe* von F.

Betrachte als Beispiel für n=2 dieses Quadrat.



Elemente seiner Symmetriegruppe sind Spiegelungen und Drehungen um $\alpha * 90°$, $\alpha \in \mathbb{Z}$. Einer Spiegelung an der X-Achse entspricht z.B. die Permutation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das heißt die Symmetriegruppe dieses Quadrates besteht aus den acht Elementen

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

2.9 Gruppentafeln

Wir sind daran interessiert, alle Gruppen einer festen endlichen Ordnung zu finden. Dies ist so noch keine vernünftige Aufgabe, weil die Elemente beliebige Namen haben können. Z.B. ist $(\{e\}, \cdot)$ eine Gruppe, wenn man einfach $e \cdot e = e$ setzt. Dies ist eine Gruppe der Ordnung 1. Benennt man e um, so erhält man eine andere Gruppe der Ordnung 1. Diese ist aber isomorph zur ersten. Isomorphie von Gruppen ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen *Isomorphieklassen* von Gruppen. Zwei endliche Gruppen sind genau dann isomorph, wenn sie nach Umbenennung der Elemente dieselbe Verknüpfungstafel haben. Die Verknüpfungstafel einer Gruppe heißt *Gruppentafel*. Es kann also nur endlich viele Isomorphieklassen von Gruppen einer festen endlichen Ordnung geben. Die Aufgabe lautet nun, für jede dieser Klassen einen Vertreter zu finden. Dies kann man machen, indem man alle möglichen Gruppentafeln angibt.

Aus der Kürzungsregel folgt, daß die Zeilen und Spalten einer Gruppentafel Permutationen der Gruppenelemente sind. In der Zeile und Spalte des neutralen Elementes stehen die Gruppenelemente in der Originalreihenfolge. Sind diese beiden Regeln erfüllt, so ist die Existenz von neutralem Element und der inversen Elemente gesichert und man muß noch die Assoziativität nachprüfen. Diese spiegelt sich in der Gruppentafel nicht unmittelbar wieder. Dagegen ist die Gruppe genau dann kommutativ, wenn ihre Gruppentafel symmetrisch ist bezüglich der Diagonalen von links oben nach rechts unten.

Auf diese Weise werden jetzt die endlichen Gruppen der Ordnung ≤ 3 klassifiziert.

Es ist klar, daß es genau eine Gruppe der Ordung 1 gibt.

Die einzig mögliche Gruppentafel für eine Gruppe der Ordnung 2 ist

$$\begin{array}{cc} e & a \\ a & e \end{array}$$

Diese Gruppe ist isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Sie ist abelsch.

Die einzig mögliche Gruppentafel für eine Gruppe der Ordnung 3 ist

$$\begin{array}{ccc} e & a & b \\ a & b & e \\ b & e & a \end{array}$$

Diese Gruppe ist isomorph zu $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Sie ist abelsch. gruta 1

2.9.1. Übung Man entwickele einen Algorithmus, der nach obigem Vorbild alle endlichen Gruppen einer festen Ordnung n klassifiziert und schätze seine Komplexität ab.

2.10 Zyklische Gruppen und Elementordnung

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. zyk 1

2.10.1. Satz *Für alle $a \in G$ ist $(\{a^n : n \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$ eine Gruppe.*

zyk 2

2.10.2. Definition

1. *Für $a \in G$ heißt $\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ die von a erzeugte Untergruppe. Die* Ordnung *von a ist die Ordnung von $\langle a \rangle$. Sie wird mit $\operatorname{ord}_G a$ bezeichnet.*
2. *G heißt* zyklisch, *falls $G = \langle a \rangle$ ist für ein $a \in G$.*

zyk 4

2.10.3. Satz *Sei $a \in G$.*

1. *Gibt es eine natürliche Zahl k mit $a^k = e$, so ist $\operatorname{ord}_G a = \min\{k : a^k = e\}$ und für $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt $a^n = a^m$ genau dann, wenn $n \equiv m \bmod \operatorname{ord}_G a$.*
2. *Ist $\operatorname{ord}_G a$ endlich und R ein volles Restsystem $\bmod \operatorname{ord}_G a$ so gilt $\langle a \rangle = \{a^r : r \in R\}$.*

3. *Gilt $a^k \neq e$ für alle netürlichen Zahlen k, dann ist a von unendlicher Ordnung und für $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt $a^n = a^m$ genau dann, wenn $n = m$ ist.*

Beweis: Sei $m = \min\{k : a^k = e\}$ und $n, m \in \mathbb{N}$. Schreibe $n - m = qm + r$ mit $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < m$. Dann gilt $a^n = a^m$ genau dann, wenn $e = a^{n-m} = a^{qm+r} = a^r$. Wegen der Minimalität von m ist dies gleichbedeutend mit $r = 0$. Die Anzahl der verschiedenen Potenzen von a ist also gleich der Anzahl der Restklassen mod m. Hieraus folgen alle drei Behauptungen. □

zyk 4.1

2.10.4. Korollar *Für $a \in G$, $n \in \mathbb{Z}$ gilt genau dann $a^n = e$, wenn n ein Vielfaches der Ordnung von a ist.*

zyk iso

2.10.5. Satz *Ist G eine zyklische Gruppe der Ordnung $n \in \mathbb{N}$, so ist $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Genauer gilt:*

Ist $G = \langle a \rangle$, so ist die Abbildung

$$G \longrightarrow {}^{\mathbb{Z}}\!/_{n\mathbb{Z}}, \quad a^j \longmapsto j \operatorname{Mod} n$$

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis: Wohldefiniertheit und Injektivität der angegebenen Abbildung folgen mit Satz 2.10.3. Da G und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ beide n Elemente haben, folgt aus Injektivität auch Surjektivität, also ist die angegebene Abbildung bijektiv. Die Potenzgesetze implizieren, daß die Abbildung auch ein Homomorphismus ist. □

zyk 5

2.10.6. Satz 1. *Für $a \in G$ und $m \in \mathbb{Z}$ gilt $\operatorname{ord}_G a^m = \operatorname{ord}_G a / \gcd(\operatorname{ord}_G a, m)$.*

2. *Für $a, b \in G$ folgt aus $ab = ba$ und $\gcd(\operatorname{ord}_G a, \operatorname{ord}_G b) = 1$, daß $\operatorname{ord}_G(ab) = (\operatorname{ord}_G a)(\operatorname{ord}_G b)$ ist.*

Beweis: Sei $\alpha = \operatorname{ord}_G a$. Dann gilt $(a^m)^n = e$ genau dann, wenn $\alpha | nm$. Dies ist gleichbedeutend damit, daß $\alpha / \gcd(\alpha, m)$ ein Teiler von n ist. Die kleinste Zahl n, die das erfüllt ist $\alpha / \gcd(\alpha, m)$. Diese ist nach Satz 2.10.3 die Ordnung von a^m.

Die zweite Behauptung wird als Übung bewiesen. □

zyk 6

2.10.7. Satz 1. *Eine unendliche zyklische Gruppe hat genau zwei Erzeuger. Ist a ein Erzeuger, so ist a^{-1} der andere.*

2. *Eine endliche zyklische Gruppe hat genau $\varphi(|G|)$ Erzeuger. Ist a ein Erzeuger, so ist $\{a^m : \gcd(|G|, m) = 1\}$ die Menge aller Erzeuger.*

Beweis: Sei a ein Erzeuger der zyklischen Gruppe G.

Sei G unendlich. Sei $m \in \mathbb{Z}$ und a^m ein anderer Erzeuger von G. Dann muß es für alle $n \in \mathbb{Z}$ ein $x \in \mathbb{Z}$ geben mit $a^n = a^{xm}$. Aus Satz 2.10.3 folgt, daß $n = xm$ lösbar sein muß für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $m = \pm 1$.

Sei G endlich. Ein Element a^m ist genau dann ein Erzeuger von G, wenn $\operatorname{ord}_G a^m = \operatorname{ord}_G a$. Dies ist nach Satz 2.10.6 gleichbedeutend damit, daß $\gcd(|G|, m) = 1$ ist. Aus Satz 2.10.3 folgt, daß die Anzahl der Erzeuger gerade $\varphi(|G|)$ ist. □

Ist m eine natürliche Zahl und ist $b \in G$, so nennt man eine Lösung x der Gleichung $x^m = b$ eine *m-te Wurzel* von b. zyk 7

2.10.8. Satz *Sei m eine natürliche Zahl. Ein Element b einer endlichen zyklischen Gruppe hat genau dann eine m-te Wurzel, wenn $b^{|G|/\gcd(m,|G|)} = 1$ ist. Die Anzahl der m-ten Wurzeln ist dann* $\gcd(m, |G|)$.

Beweis: Sei a ein Erzeuger von G, $a^\beta = b$. Der Ansatz $x = a^\xi$ führt zu der Gleichung $a^{m\xi} = a^\beta$, also nach Satz 2.10.3 zu der Kongruenz $m\xi \equiv \beta \bmod |G|$. Diese Kongruenz ist genau dann lösbar, wenn $\gcd(m, |G|) \mid \beta$, d.h. $\gcd(m, |G|) \mid \gcd(|G|, \beta)$, d.h. $\operatorname{ord}_G b = |G|/\gcd(|G|, \beta) \,|\, |G|/\gcd(|G|, m)$, d.h. $b^{|G|/\gcd(|G|,m)} = e$. Die Anzahl der mod $|G|$ verschiedenen Lösungen der Kongruenz ist die Anzahl der m-ten Wurzeln. □

zyk 8

2.10.9. Satz *Eine endliche Gruppe G ist genau dann zyklisch, wenn sie abelsch ist und e höchstens n verschiedene n-te Wurzeln hat für alle natürlichen Zahlen $n < |G|$.*

Beweis: Endliche zyklische Gruppen haben nach Satz 2.10.8 obige Eigenschaften.

Habe umgekehrt die endliche Gruppe G obige Eigenschaften. Wir zeigen die Existenz eines Elementes der Ordnung $|G|$. Sei a ein Element maximaler Ordnung n in G. Sei $b \in G$ ein Element der Ordnung m. Dann ist m ein Teiler von n. Andernfalls gibt es einen Primteiler p von m, der nicht in n aufgeht. Die Ordnung von $c = b^{m/p^{e(p,m)}}$ ist $e(p, m)$ nach Satz 2.10.6. Die Ordnung von ac ist $np^{e(p,m)}$ ebenfalls nach Satz 2.10.6. Dies aber widerspricht der Maximalität von n. Damit gilt $b^n = 1$ für alle $b \in G$. Nach Voraussetzung kann es aber höchstens n viele solche Elemente in G geben. Damit ist $n = |G|$. □

2.11 Berechnung der Elementordnung

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Als *elementare Operationen* in G bezeichnen wir

1. die Entscheidung, ob zwei Elemente in G gleich sind,
2. die Berechnung des Produkts zweier Gruppenelemente,

3. Die Berechnung des Inversen eines Gruppenelementes.

Ist G endlich, so besteht eine einfache Aufgabe darin, die Ordnung eines Elementes g zu berechnen. Dies kann man machen, indem man sukzessive die Potenzen $g, g^2, \ldots$ berechnet, bis der erste Exponent x gefunden ist mit $g^x = 1$. Hierzu sind $\operatorname{ord}_G g$ viele Multiplikationen und Vergleiche in G nötig. Außerdem müssen konstant viele Gruppenelemente gespeichert werden. Man kann dieses Verfahren aber auf Kosten des Speicherplatzes beschleunigen. Hierzu benutzt man eine Methode, um die natürlichen Zahlen aufzuzählen, die auf folgender Aussage beruht. compord 1

2.11.1. Satz *Sei v eine gerade natürliche Zahl.*

1. *Die Menge der natürlichen Zahlen ist die Menge aller Zahlen $x = 2^k vq + r$ mit $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq 2^k v$, $\lfloor 4^{k-1} \rfloor v^2 \leq 2^k qv < 4^k v^2$.*
2. *Die obige Darstellung der natürlichen Zahlen ist eindeutig, d.h. zwei so dargestellte Zahlen sind genau dann gleich, wenn k, q, r übereinstimmen.*

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß jede natürliche Zahl in der obigen Weise dargestellt werden kann. Wähle hierzu k so, daß $\lfloor 4^{k-1} \rfloor v^2 \leq x < 4^k v^2$. Schreibe dann $x = 2^k vq + r$ mit $1 \leq r \leq 2^k v$. Dann ist $\lfloor 4^{k-1} \rfloor v^2 - 2^k v < 2^k vq \leq 4^k v^2 - 1$. Daraus folgt, daß $2^k vq < 4^k v^2$ ist. Außerdem erhält man $-v < vq$, also $0 \leq vq$ für $k = 0$. Für $k \geq 1$ gilt $4^{k-1} v^2 - 2^k v < 2^k vq$, also $2^{k-1}(v/2) - 1 < q$. Weil v gerade ist, folgt daraus $2^{k-1}(v/2) \leq q$, also $4^{k-1} v^2 \leq 2^k vq$.

Nun zeigen wir die Eindeutigkeit der Darstellung. Sei x in der beschriebenen Weise dargestellt. Dann gilt $\lfloor 4^{k-1} \rfloor v^2 \leq 2^k vq < 4^k v^2$. Daraus folgt, daß $q < 2^k v$, also $q \leq 2^k v - 1$, also $x = 2^k vq + r < 2^k v(2^k v - 1) + 2^k v = 4^k v^2$. Für $k = 0$ folgt außerdem $x \geq 1$ und für $k > 0$ hat man $x \geq 4^{k-1} v^2$. □

Die Ordnung x wird in der Darstellung $x = y + r$ bestimmt, wobei $y = 2^k vq$ und q, r in den in Satz 2.11.1 angegebenen Schranken liegt. Der Parameter k durchläuft die Werte $0, 1, 2, \ldots$ bis die Elementordnung gefunden ist. Zuerst wird die Menge

$$R = \{(g^{-r}, r) : 1 \leq r \leq 2^k v\}$$

vorberechnet. Diese Menge hängt natürlich von k ab und muß für jedes neue k vergrößert werden. Dann wird für alle zulässigen y getestet, ob $g^{y+r} = 1$ ist für ein zulässiges r. Dies geschieht, indem geprüft wird, ob (g^y, r) in R vorkommt für ein r. Sobald ein passendes Paar gefunden ist, ist die Elementordnung $x = y + r$ gefunden. Der Vorteil dieses Vorgehens ist, daß man nur $\mathrm{O}(\sqrt{x})$ viele Multiplikationen in G braucht, um die Ordnung zu finden. Außerdem kann man in vielen Gruppen die Elemente sortieren. Dies erlaubt es, den Test, ob (g^y) zu R gehört, mittels binärer Suche durchzuführen. Die Ordnung x von g kann dann mittels $\mathrm{O}(\sqrt{x})$ elementaren Operationen in G gefunden werden. Dafür muß man aber auch $\sqrt{x}$ viele Gruppenelemente speichern. Die Zeitersparnis geht also auf Kosten des verbrauchten Speicherplatzes.

Hier ist die formale Version des Verfahrens. compord 2

2.11.2. Algorithmus

Berechnung der Elementordnung

EINGABE: $g \in G$, $v \in 2\mathbb{N}$
AUSGABE: $x = \mathrm{ord}_G\, g$

```
x = 0; u = v; s = 1; h = g^{-1}; a = 1; R = ∅;
y = 0; b = 1; c = g^v;
while (x = 0) do
   for (r = s, s + 1 ..., u) do
      a = ah; R = R ∪ {(a, r)}
   od
   while (x = 0 and y < u^2) do
      if (there is a smallest r with (b, r) ∈ R) then
         x = y + r
      else
         y = y + u; b = bc
      fi
   od
   s = u + 1; u = 2u; c = c^2
od
```

compord 3

2.11.3. Satz *Algorithmus 2.11.2 benötigt* $\mathrm{O}(\sqrt{\mathrm{ord}_G\, g})$ *Multiplikationen und Speicherplatz für* $\mathrm{O}(\sqrt{\mathrm{ord}_G\, g})$ *Gruppenelemente.*

Der beschriebene Algorithmus beruht auf einer Idee von D. Shanks [11]. Ich weise darauf hin, daß man die Berechnung der Elementordnung noch wesentlich beschleunigen kann, wenn man die Gruppenordnung kennt. Dies wird später noch diskutiert. Im übrigen ist der vorgestellte Algorithmus der schnellste, der für beliebige Gruppen bekannt ist.

2.12 Berechnung diskreter Logarithmen

Die Ideen des vorigen Abschnitts können auch angewendet werden, um diskrete Logarithmen in beliebigen Gruppen zu berechnen. Sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe und seien g, d Gruppenelemente. Es soll entschieden werden, ob d zu der von g erzeugten Untergruppe gehört und wenn ja, soll $z = \log_g d$ bestimmt werden. Hierzu beachte man zuerst, daß im Fall der Existenz des diskreten Logarithmus $z < \mathrm{ord}_G\, g$ gilt. Wie in Algorithmus 2.11.2 wird die Ordnung von g in G bestimmt, d.h. es wird versucht, Zahlen y und r zu finden mit $g^{y+r} = 1$. Für jedes y wird aber vorher getestet, ob nicht vielleicht $g^{y+r} = d$, d.h.

$d^{-1}g^y = g^r$, d.h. $(d^{-1}g^y, r) \in R$ ist für ein r. Dann ist nämlich der diskrete Logarithmus von d zur Basis g gefunden. Sobald aber die Ordnung von g bestimmt ist, kann es keinen diskreten Logarithmus von d zur Basis g mehr geben, weil der ja kleiner als die Ordnung sein müßte. Damit ergibt sich folgender Algorithmus. compdl 1

2.12.1. Algorithmus

DL-Berechnung

EINGABE: $g, d \in G$, $v \in 2\mathbb{N}$
AUSGABE: $x = \mathrm{ord}_G\, g$ oder $z = \log_g d$

```
x = 0 z = 0; ; u = v; s = 1; h = g^{-1}; a = 1; R = ∅;
y = 0; b = 1; c = g^v; e = d^{-1}
while (x = 0 and z = 0) do
   for (r = s, s + 1 ..., u) do
      a = ah; R = R ∪ {(a, r)}
   od
   while (x = 0 and z = 0 and y < u^2) do
      if ((eb, r) ∈ R for some r) then
         z = y + r
      else
         if ((b, r) ∈ R for some r) then
            x = y + r
         fi
      else
         y = y + u; b = bc
      fi
   od
   s = u + 1; u = 2u; c = c^2
od
```

compdl 2

2.12.2. Satz *Gilt $d \in \langle g \rangle$ so benötigt Algorithmus 2.12.1 $\mathrm{O}(\sqrt{\log_d g})$ Multiplikationen und Speicherplatz für $\mathrm{O}(\sqrt{\mathrm{ord}_G\, g})$ Gruppenelemente. Andernfalls benötigt Algorithmus 2.12.1 $\mathrm{O}(\sqrt{\mathrm{ord}_G\, g})$ Multiplikationen und Speicherplatz für $\mathrm{O}(\sqrt{\mathrm{ord}_G\, g})$ Gruppenelemente.*

2.13 Untergruppen

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. unter 1

2.13.1. Definition *Eine Teilmenge U von G heißt* Untergruppe *von G, wenn U bezüglich der in G definierten Verknüpfung eine Gruppe ist.*

unter 2

2.13.2. Definition *Seien K, L nicht leere Teilmengen von G.*

1. *Das* Komplexprodukt *von K und L ist $KL = \{kl : k \in K, l \in L\}$.*
2. *Das* Komplexinverse *von K ist $K^{-1} = \{k^{-1} : k \in K\}$.*
3. *Für $a \in G$ setzt man außerdem $aK = \{a\}K$ und $Ka = K\{a\}$.*

unter 3

2.13.3. Satz *Sei U eine nicht leere Teilmenge von G.*

1. *Genau dann ist U eine Untergruppe von G, wenn $UU^{-1} \subset U$ ist.*
2. *Ist U endlich, so ist U genau dann eine Untergruppe von G, wenn $UU \subset U$ ist.*

Beweis: [7] Satz 2.4.7. □

unter 4

2.13.4. Satz *Der Durchschnitt beliebig vieler Untergruppen von G ist wieder eine Untergruppe von G.*

2.14 Gruppenhomomorphismen

Es seien G, H Gruppen. Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, e das neutrale Element von G und e' das neutrale Element von H. ghom 1

2.14.1. Satz 1. *$\varphi(e)$ ist das neutrale Element von H.*

2. *$\varphi(a^n) = \varphi(a)^n$ für alle $a \in G$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Man setzt

$$\mathrm{Bild}\varphi = \{\varphi(x) : x \in G\}$$
$$\mathrm{Kern}\varphi = \{x \in G : \varphi(x) = e'\}$$

ghom 1.1

2.14.2. Satz 1. *Das Bild von φ ist eine Untergruppe von H.*

2. *Der Kern von φ ist eine Untergruppe von G.*

ghom 2

2.14.3. Satz *Der Homomorphismus φ ist genau dann injektiv, wenn Kern $\varphi = \{e\}$ ist.*

Die Automorphismen von G bilden eine Gruppe, die sogenannte *Automorphismengruppe* von G. Ist $x \in G$ so ist

$$\varphi_x : G \to G, a \mapsto x^{-1}ax$$

ein Automorphismus von G. Solche Automorphismen heißen *innere Automorphismen* von G. Zwei Elemente $a, b \in G$ heißen *konjugiert*, wenn $b = x^{-1}ax$ ist für ein $x \in G$. Zwei Untergruppen U, V von G heißen *konjugiert*, wenn $V = x^{-1}Ux$ ist für ein $x \in G$. ghom 3

2.14.4. Satz *Jede Gruppe G ist isomorph zu einer Untergruppe der Permutationsgruppe $S(G)$.*

Beweis: Für $g \in G$ definiere $L(g) \in S(G)$ durch $x \mapsto gx$. Man zeigt, daß $L(G) = \{L(g) : g \in G\}$ eine Untergruppe von $S(G)$ ist und daß die Abbildung $L : G \to L(G), g \mapsto L(g)$ ein Gruppenisomorphismus ist. □

Es folgt, daß jede endliche Gruppe isomorph ist zu einer Untergruppe der S_n.

2.15 Der Satz von Lagrange

Sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe von G. lagr 1

2.15.1. Definition *Die Relation R_U wird definiert durch $R_U = \{(x, y) \in G \times G : xy^{-1} \in U\}$.*

lagr 2

2.15.2. Satz *Die Relation R_U ist eine mit der Verknüpfung in G rechtsverträgliche Äquivalenzrelation.*

Die Äquivalenzklasse von $x \in G$ ist Ux. Sie heißt *Rechtsnebenklasse* von U in G. Entsprechend definiert man L_U und die *Linksnebenklassen* von U. lagr 3

2.15.3. Satz

1. *Die Gruppe G ist disjunkte Vereinigung der Rechtsnebenklassen bzw. Linksnebenklassen von U in G.*
2. *Alle Rechtsnebenklassen bzw. Linksnebenklassen haben die gleiche Mächtigkeit wie U.*

lagr 4

2.15.4. Definition *Die Anzahl der Rechtsnebenklassen von U in G heißt* Index *von U in G und wird mit $(G : U)$ bezeichnet.*

lagr 5

2.15.5. Satz (Lagrange) *Die Anzahl der Rechtsnebenklassen von U in G ist gleich der Anzahl der Linksnebenklassen von U in G und es gilt $|G| = (G : U)|U|$.*

lagr 6

2.15.6. Satz *Ist G endlich, so folgt $a^{|G|} = 1$ für alle $a \in G$.*

lagr 7

2.15.7. Übung Satz von Fermat, Fermattest, Pseudoprimzahl.

lagr 8

2.15.8. Satz *Jede Gruppe von Primzahlordnung ist zyklisch.*

lagr 9

2.15.9. Satz *Ist G zyklisch und ist a ein Erzeuger von G, so ist $\langle a^d \rangle$ für alle Teiler d von $|G|$ die eindeutig bestimmte Untergruppe von G mit Index d. Ist G unendlich, so ist $\langle e \rangle$ die eindeutig bestimmte Untergruppe von G mit Index ∞.*

2.16 Anwendung des Satzes von Lagrange

Sei G eine endliche Gruppe. Ist die Gruppenordnung bekannt, so kann man die Ordnung eines Elementes g von G bestimmen, indem man nach dem kleinsten Teiler x von $|G|$ sucht, für den $g^x = 1$ gilt. anwlag 0

2.16.1. Übung Entwickele einen Algorithmus, der die Ordnung eines Elementes der S_n berechnet.

Man kann dieses Verfahren noch beschleunigen. Hierzu benutzt man das folgende Ergebnis. anwlag 2

2.16.2. Satz *Sei $|G| = m_1 m_2 \cdots m_k$ eine Faktorisierung der Ordnung von G in ein Produkt paarweise teilerfremder natürlicher Zahlen m_i, $1 \leq i \leq k$. Dann ist die Ordnung eines Elementes $g \in G$ das Produkt der Ordnungen der Elemente $g^{|G|/m_i}$, $1 \leq i \leq k$.*

Beweis: Sei $M_i = |G|/m_i$ und x_i die Ordnung von $g_i = g^{M_i}$, $1 \leq i \leq k$. Dann ist $g_i^x = 1$ und nach dem Satz von Lagrange ist $g_i^{m_i} = 1$ für $1 \leq i \leq k$. Daher ist x_i ein Teiler von m_i und von x für $1 \leq i \leq k$. Weil die m_i paarweise teilerfremd sind, ist das Produkt der x_i ein Teiler von x. Andererseits gibt es ganze Zahlen a_i, $1 \leq i \leq k$ mit $a_1 M_1 + \ldots + a_k M_k = 1$. Daher ist $g^{x_1 \cdots x_k} = g^{(a_1 M_1 + \ldots + a_k M_k)(x_1 \cdots x_k)} = 1$. Daraus folgt die Behauptung. □

Eine weitere Anwendung des Satzes von Lagrange besteht in der schnelleren Berechnung von diskreten Logarithmen. Sei hierzu G zyklisch mit Erzeuger a. Sei außerdem $b \in G$. Es soll ein Exponent x gefunden werden mit $a^x = b$.

Teilerfremde Zerlegung von $|G|$.

DL für Primzahlpotenzen.

Übung: Löse auf diese Weise das Entscheidungsproblem.

2.17 Normalteiler und Faktorgruppen

Sei G eine Gruppe mit Untergruppe U. normteil 1

2.17.1. Definition *Die Untergruppe U heißt Normalteiler, wenn $aU = Ua$ gilt für alle $a \in G$.*

normteil 2

2.17.2. Satz *Genau dann ist U ein Normalteiler, wenn $aUa^{-1} \subset U$ für alle $a \in G$.*

Ist U ein Normalteiler, so ist für alle $a \in G$ die Rechtsnebenklasse Ua gleich der Linksnebenklasse aU. Diese nennt man daher *Nebenklasse*. normteil 3

2.17.3. Satz *Ist U ein Normalteiler von G, so bilden die Nebenklassen von U in G eine Gruppe bezüglich der Komplexmultiplikation.*

normteil 4

2.17.4. Definition *Ist U ein Normalteiler von G, so heißt die Gruppe der Nebenklassen von U in G* Faktorgruppe *von G nach U, in Zeichen G/U.*

normteil 5

2.17.5. Satz *Ist H eine weitere Gruppe und $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus, so ist $G' = Kern\ \varphi$ ein Normalteiler von G und die Abbildung $G/G' \to Bild\varphi$, $aG' \mapsto \varphi(a)$ ist ein Isomorphismus.*

2.18 Erzeugendensysteme

Sei G eine Gruppe und $S \subset G$. erzeug 1

2.18.1. Definition *1. Die von S erzeugte Gruppe ist der Durchschnitt aller Untergruppen von G, die S enthalten. Sie wird mit $\langle S\rangle_G$ bezeichnet, bzw. mit $\langle S\rangle$, falls G klar ist.*

2. Ist $\langle S\rangle = G$, so heißt S Erzeugendensystem von G.

3. Hat G ein endliches Erzeugendensystem, so heißt G endlich erzeugt*.*

erzeug 2

2.18.2. Satz *Es ist $\langle\emptyset\rangle = \{e\}$. Ist $S \neq \emptyset$, so besteht $\langle S\rangle$ aus allen endlichen Potenzprodukten von Elementen aus S.*

2.18.3. Beispiel Für $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) := \{A \in \mathbb{Z}^{2\times 2} | \det(A) = 1\}$ gilt:

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

2.19 Operation von Gruppen auf Mengen

Sei X eine Menge und G eine Gruppe. oper 1

2.19.1. Definition *Wir sagen, daß G auf X operiert, wenn es eine Abbildung $\cdot : G\times X \to X$, $(g,x) \mapsto g\cdot x$ gibt mit*

1. $(gh)\cdot x = g\cdot(h\cdot x)$,

2. $ex = x$

für alle $x \in X$ und $g,h \in G$.

oper 2

2.19.2. Satz *In der Situation von Definition 2.19.1 ist*

$$R = \{(x,y) \in X\times X : \text{Es gibt } g \in G \text{ mit } y = gx\}$$

eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzklassen von R aus Satz 2.19.2 heißen *G-Orbits* oder *G-Bahnen* von X. Die Menge X ist disjunkte Vereinigung ihrer G-Orbits.

2.20 Die symmetrische Gruppe S_n

Sei n eine natürliche Zahl. symm 1

2.20.1. Definition *Für r paarweise verschiedene Zahlen $a_1, \ldots, a_r$ aus $\{1, \ldots, n\}$ bezeichnet $(a_1, \ldots, a_r)$ die Permutation der S_n, die a_i auf a_{i+1} abbildet für $i < r$ und a_r auf a_1. Diese Permutation heißt r-*Zykel. *2-Zykeln heißen* Transpositionen.

Transpositionen haben die Ordnung 2. Zykel der Länge 1 heißen *trivial*. Die anderen heißen nicht trivial. symm 2

2.20.2. Satz *Die S_{n+1} ist disjunkte Vereinigung der Nebenklassen $(i, n+1)S_n$, $1 \leq i \leq n+1$.*

Beweis: Sei $f \in S_{n+1}$. Dann ist $(f(n+1), n+1) \circ f \in S_n$ und $f = (f(n+1), n+1)^2 \circ f$. Also ist S_{n+1} Vereinigung der Nebenklassen $(i, n+1)S_n$, $1 \leq i \leq n+1$. Diese Vereinigung ist disjunkt, weil die Transposition das Bild von $n+1$ bestimmt. □

symm 3

2.20.3. Korollar *Es gilt $|S_{n+1}| = (n+1)S_n$, $|S_n| = n!$.*

symm 4

2.20.4. Korollar *Jede Permutation ist Produkt von Transpositionen.*

symm 5

2.20.5. Übung Der Beweis von Satz 2.20.2 enthält einen Algorithmus zur Zerlegung einer Permutation in ein Produkt von Transpositionen. Man formuliere und analysiere diesen Algorithmus.

symm 6

2.20.6. Definition *Zwei Zykel $(x_1, \ldots, x_r)$ und $(y_1, \ldots, y_s)$ heißen* elementfremd, *wenn der Durchschnitt der Mengen $\{x_1, \ldots, x_r\}$ und $\{y_1, \ldots, y_s\}$ leer ist.*

symm 7

2.20.7. Satz *Jede Permutation $f \neq (1)$ kann als Produkt elementfremder nicht trivialer Zyklen geschrieben werden. Diese Darstellung ist bis auf die Reihenfolge eindeutig.*

Beweis: Sei $f \in S_n$. Die Abbildung $(f^j, i) \mapsto f^j(i)$ definiert eine Operation von $\langle f \rangle$ auf $\{1, \ldots, n\}$. Also zerfällt $\{1, \ldots, n\}$ in paarweise disjunkte $\langle f \rangle$-Orbits. Ist $f \neq (1)$ so hat wenigstens ein Orbit mehr als ein Element. Für einen solchen nicht trivialen Orbit Y definiere die Permutation f_Y durch $f_Y(i) = f(i)$, falls $i \in Y$ und $f_Y(i) = i$ andernfalls. Dann sind die f_Y elementfremde nicht triviale Zyklen und f ist das Produkt der f_Y.

Sei eine weitere Zerlegung von f gegeben und sei g ein Zyklus, der in dieser Zerlegung vorkommt. Dann gibt es genau einen nicht trivialen $\langle f \rangle$-Orbit Y, auf dem g nicht die Identität ist. Hierfür gilt $g = f_Y$. □

Algorithmus.

Kapitel 3

Ringe

3.1 Ringbegriff

ringb 1

3.1.1. Definition *Ein* Ring *ist eine algebraische Struktur* $(R, +, \cdot)$, *wobei*

1. $(R, +)$ *eine abelsche Gruppe und* $(R, \cdot)$ *eine Halbgruppe ist und*
2. $a(b + c) = ab + ac$ *sowie* $(b + c)a = ba + ca$ *gilt für alle* $a, b, c \in R$.

Der Ring R heißt kommutativ, *wenn die Halbgruppe* $(R, \cdot)$ *kommutativ ist.*

Sie R ein Ring, $a, b, c, e \in R$. Das neutrale Element bezüglich $+$ sei 0.

$a \in R$ heißt *Nullteiler* von R, wenn es ein $b \neq 0$ gibt mit $ab = 0$ oder $ba = 0$.

R heißt *nullteilerfrei*, wenn R keine Nullteiler außer 0 enthält.

R heißt *Integritätsbereich*, wenn $R \neq \{0\}$ kommutativ und nullteilerfrei ist.

Genau dann ist R nullteilerfrei, wenn in R die Kürzungsregel gilt.

a heißt *Teiler* von b, wenn es $c \in R$ gibt mit $b = ca$ oder $b = ac$.

e heißt *Einselement* von R, wenn $e \neq 0$ und $ae = ea = a$ für alle $a \in R$ ist.

In einem kommutativen Ring mit Einselement e setzt man $a^0 = e$ und es gelten dann der Binomialsatz

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

und

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{i=1}^{n-1} a^i b^{n-i-1}.$$

Sei e ein Einselement von R. a heißt *Einheit* von R, wenn es $b \in R$ gibt mit $ab = ba = e$. Man schreibt $b = a^{-1}$ und nennt b das *Inverse* von a. Einheiten sind nie Nullteiler. Die Menge R^* der Einheiten von R ist eine Gruppe, die *Einheitengruppe* von R.

Ein *Schiefkörper* ist ein Ring mit Eins, in dem jedes von Null verschiedene Element ein Inverses hat. Ein *Körper* ist ein kommutativer Schiefkörper.

Eine Teilmenge T von R, die bezüglich $+, \cdot$ ein Ring ist, heißt *Teilring* oder *Unterring* von R. R heißt dann *Oberring* von T.

3.2 Polynomringe

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement 1 und S ein kommutativer Oberring von R mit Einselement 1. Sei $z \in S$.

Ein Element p von S heißt *Polynom* in z über R falls p eine Darstellung poly 1

$$p = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_n \tag{3.1}$$

hat mit $p_i \in R$, $0 \leq i \leq n$. Diese Darstellung ist i.a. nicht eindeutig. Die Menge aller Polynome in z über R wird mit $R[z]$ bezeichnet.

x heißt *Unbestimmte* über R oder *transzendent* über R, falls x zu einem kommutativen Oberring von R gehört und aus $p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n = 0$ mit $n \geq 0$ und $p_i \in R$, $0 \leq i \leq n$ folgt, daß $p_i = 0$, $0 \leq i \leq n$. Ist z transzendent über R, so ist die Darstellung (3.1) eines Polynoms $p \neq 0$ eindeutig, wenn man noch fordert, daß $p_0 \neq 0$ ist. Dabei heißt dann n der *Grad* von p, kurz $n = \deg p$, p_i die *Koeffizienten*von p, $0 \leq i \leq n$, p_0 der *höchste Koeffizient* von p, kurz $p_0 = H(p)$, und p_n ist das *konstante Glied* von p. Es wird auch noch vereinbart, daß $\deg 0 = -\infty$ ist. poly 1

3.2.1. Satz *Es gibt mindestens eine Unbestimmte über R.*

Insbesondere können wir also induktiv Polynome in mehreren Unbestimmten konstruieren. Sei $R[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ ein Erweiterungsring von R mit $n-1$ Unbestimmten. Dann ist $R[x_1, \ldots, x_n] := (R[x_1, \ldots, x_{n-1}])[x_n]$ ein Ring in n Unbestimmten.

Polynome aus dem Ring $R[x_1, \ldots, x_n]$ heißen *univariat*, falls $n = 1$, sonst *multivariat*. Ein Polynom $f(x_1, \ldots, x_n) \in R[x_1, \ldots, x_n]$ sieht dann so aus:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 0}^{m} a_{i_1, \ldots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}.$$

In dieser Darstellung heißen die $a_{i_1, \ldots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ *Monome*, die $a_{i_1, \ldots, i_n}$ heißen *Koeffizienten*, die $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ heißen *Terme*, $\max\{\sum_{j=1}^{n} i_j | a_{i_1, \ldots, i_n} \neq 0\}$ heißt *totaler Grad* von f, kurz $\deg f$.

Betrachtet man f als Polynom über $(R[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n])[x_i]$, $1 \leq i \leq n$, also als Polynom in einer Unbestimmten mit Koeffizienten aus $R[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n]$, so kann man dieses Polynom auch als $f_{i0} \cdot x_i^n + \ldots + f_{in} \cdot x_i^0$ schreiben; dann heißt n *Grad von f in x_i*, kurz $n = \deg_{x_i} f$.

3.2.2. Beispiel Sei $f = 3x_1^4x_2^2x_3 + 5x_1^2x_2^5x_3^2 + 5x_2^5x_3^7$. Dann ist $\deg f = 12$, $\deg_{x_1} f = 4$, $\deg_{x_2} f = 5$, $\deg_{x_3} f = 7$.

Sei nun S ein Ring mit $R \subseteq S$, $c_1, \ldots, c_n \in S$. Dann ist die folgende Abbildung ein Homomorphismus zwischen Ringen:

$$\begin{aligned} \varphi_{c_1,\ldots,c_n} : R[x_1, \ldots, x_n] &\longrightarrow S \\ f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{m} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} &\longmapsto \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{m} a_{i_1,\ldots,i_n} c_1^{i_1} \cdots c_n^{i_n}. \end{aligned}$$

$\varphi_{c_1,\ldots,c_n}$ heißt *Spezialisierung von f*. Für $\varphi_{c_1,\ldots,c_n}(f)$ schreibt man auch $f(c_1, \ldots, c_n)$. Falls $\varphi_{c_1,\ldots,c_n}(f) = 0$, so heißt $\varphi_{c_1,\ldots,c_n}$ Nullstelle von f, man nennt auch $(c_1, \ldots, c_n)$ Nullstelle von f.

3.3 Unterringe, Ideale, Restklassenringe

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement 1.

Ein *Teilring* oder *Unterring* von R ist eine Teilmenge von R, die bezüglich der in R definierten Verknüpfungen ein Ring ist. Entsprechend sind Teilkörper definiert.

Sei U ein Unterring von R. Für $a, b \in R$ heißt a kongruent zu b modulo U (Bezeichnung: $a \equiv b \bmod U$), wenn $b - a \in U$ ist. Kongruenz modulo U ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen *Kongruenzklassen* modulo U. Diese ist genau dann mit den Operationen in R verträglich, wenn U ein Ideal in folgendem Sinne ist. ideal 1

3.3.1. Definition *1. Eine Teilmenge I von R heißt* Ideal *von R, wenn I ein Unterring von R ist, der $aI \subset I$ für alle $a \in R$ erfüllt.*

2. Ist I ein Ideal von R, so heißt die Menge der Kongruenzklassen zusammen mit der vertreterweise definierten Multiplikation und Addition Restklassenring *von R modulo I.*

3.3.2. Beispiel Die Ideale von $\mathbb{Z}$ sind genau die Teilmengen der Form $a\mathbb{Z}$ für ein $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: Klar ist, daß diese Mengen Ideale sind. Sei nun $\{0\} \neq I \subseteq \mathbb{Z}$ ein Ideal, a die kleinste positive Zahl in I, $b \in I$. Dann existieren q, r mit $b = aq + r, 0 \leq r < a$. Da ein Ideal ein Unterring ist, ist also $r \in I$, also $r = 0$.

Also sind die Restklassenringe von $\mathbb{Z}$ von der Form $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ mit vertreterweise definierten Operationen.

ideal 2

3.3.3. Satz *Der Durchschnitt beliebig vieler Ideale von R ist wieder ein Ideal von R.*

ideal 3

3.3.4. Definition *1. Ist S eine Teilmenge von R, dann heißt der Durchschnitt I aller Ideale, die S enthalten, das* von S erzeugte Ideal, *kurz $\langle S\rangle_R$ bzw. $\langle S\rangle$. Die Menge S heißt* R-Erzeugendensystem *von I.*

2. *Wird ein Ideal von R von einer endlichen Teilmenge von R erzeugt, so heißt es* endlich erzeugt.

3. *Wird ein Ideal I von R von einer einelementigen Menge $\{r\}$ erzeugt, so wird I* Hauptideal *genannt und r heißt* Erzeuger *von I. Man schreibt dann $I = \langle r\rangle$.*

ideal 4

3.3.5. Satz *Sei S eine Teilemenge des kommutativen Rings R. Dann ist*

$$\{\sum_{i=1}^{n} r_i s_i : n \in \mathbb{N}, r_i \in R, s_i \in S, 1 \leq i \leq n\}$$

das von S erzeugte Ideal. Für $a \in R$ ist aR das von a erzeugte Hauptideal.

Beweis: Offensichtlich ist $\{\sum_{i=1}^{n} r_i s_i : n \in \mathbb{N}, r_i \in R, s_i \in S, 1 \leq i \leq n\}$ in dem von S erzeugten Ideal enthalten und diese Menge enthält S, da insbesondere $1 \cdot s = s$ für alle $s \in S$ in dieser Menge enthalten ist. Außerdem ist diese Menge ein Ideal. Dies beweist die Behauptung. □

3.3.6. Beispiel Betrachte die folgenden Gleichungen mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 x_2^3 + x_1 x_2 + x_2 x_3 &= 0 \\ g(x_1, x_2, x_3) := x_1 x_2^4 + 3x_1 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems sind die Nullstellen des Polynoms f die zugleich Nullstellen von g sind.

Dieses Problem ist in einem geeigneten Ring leicht zu lösen: Es gilt nämlich: Jede Nullstelle von f und g ist Nullstelle von allen Polynomen aus $\langle\{f, g\}\rangle$. Damit ist in $R[x_1, x_2, x_3]/\langle\{f, g\}\rangle$ 0 die einzige Nullstelle von f und g. Will man alle Lösungen in $\mathbb{R}$ haben, nutzt dies jedoch noch nicht besonders viel.

Wichtige algorithmische Probleme im Zusammenhang mit Idealen sind die folgenden Fragen:

- Ist ein Ideal ein Hauptideal? bzw. Wie viele Elemente braucht man um das Ideal zu erzeugen?

- Gehört ein Element zu einem Ideal?
- Erzeugen zwei Mengen das gleiche Ideal?

Das erste Problem ist wichtig, da die Schwierigkeit vieler Berechnungen mit Idealen von der Größe des Erzeugendensystems abhängt, für Hauptideale sind die meisten Rechnungen besonders einfach. Wenn wir z.B. im obigen Problem erkennen, daß f und g ein Hauptideal erzeugen und den Erzeuger finden, dann brauchen wir nur noch eine Gleichung zu lösen.

Die zweite Fragestellung kann in unserem Beispiel von Bedeutung sein, wenn wir schon die Nullstellen einiger Polynome kennen. Dann können wir "leicht" überprüfen, ob auch f und g eine dieser Nullstellen als Nullstelle haben.

Die dritte Frage läßt sich leicht beantworten, wenn man die zweite Frage beantworten kann: Man teste, ob alle Elemente der ersten Menge zum von der zweiten Menge erzeugten Ideal gehören und umgekehrt. ideal 5

3.3.7. Definition *Seien I und J Ideale von R.*

1. *Die* Summe *von $I + J$ ist die Komplexsumme von I und J.*
2. *Das* Produkt *von I und J ist $IJ = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in I, b_i \in J, 1 \leq i, j \leq n\}$.*

ideal 6

3.3.8. Satz *Summe und Produkt zweier Ideale sind wieder Ideale.*

Literaturverzeichnis

[1] Alfred V. Aho, John E. Hopcroft, Jeffrey D. Ullman, *The design and analysis of computer algorithms*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1974.

[2] J. Buchmann, H.C. Williams, *Algorithms for quadratic forms and quadratic fields*, Manuskript 1995.

[3] Henri Cohen, *A course in computational algebraic number theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1993.

[4] W. Diffie, M. Hellman

[5] George Havas, *Hermite normal form computation for integer matrices*,

[6] Donald E. Knuth, *The art of computer programming*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1981.

[7] Otto Körner, *Algebra*, Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main 1974.

[8] K. Meyberg, *Algebra Teil 1*, Carl Hanser Verlag, München, Wien 1980.

[9] Hans Riesel, *Prime numbers and Computer Methods for Factorization*, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart 1985.

[10] A. Schönhage, A. Grotefeld, E. Vetter, *Fast Algorithms - A Multitape Turing Machine Implementation*, B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim 1994.

[11] babystep-giantstep

[12] B.L. van der Waerden, *Algebra I*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1971.