UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachbereich 14 – Informatik

Prof. J. Buchmann
Stefan Neis

29. November 1995

7. Übung zu
"Algebra für Informatiker"

1. Zeige: Das Produkt zweier Ideale ist wieder ein Ideal.
2. Seien A und B Ideale mit $A = \langle S_A \rangle$ und $B = \langle S_B \rangle$, $|S_A| = m$ bzw. $|S_B| = n$. Gib ein Erzeugendensystem von $A \cdot B$ an und beweise die Korrektheit. Welche Mächtigkeit hätte bei Deiner Konstruktion ein Erzeugendensystem von $A^k := \underbrace{A \cdots A}_{\text{k-mal}}$, $k \in \mathbb{N}$? Wie viele Multiplikationen von Ringelementen werden zur Berechnung von A^k (bei Benutzung von schneller Exponentiation) benötigt?
3. Wir haben gesehen, wie sich Elemente des Quotientenkörpers eines Integritätsbereichs als Paare darstellen lassen. Wie kann man die elementaren Körperoperationen (d.h. Addition, Subtraktion, Division, Multiplikation und Vergleich zweier Elemente) auf solchen Paaren realisieren? Wie sind die Laufzeiten, wenn man $\mathbb{Q}$ auf diese Weise als Paare über $\mathbb{Z}$ realisiert (in Abhängigkeit von der Größe der Zähler und Nenner)?
4. Sei R Integritätsbereich und $f(x) \in R[x]$. Wir definieren induktiv die i-te formale Ableitung von f: $f^{(1)}(x) = f'(x)$ und $f^{(i+1)}(x) = (f^{(i)})'(x)$. Zeige:
   (a) Ist $a \in R$ mindestens k-fache Nullstelle von $f(x)$, so ist a mindestens $(k-i)$-fache Nullstelle von $f^{(i)}(x)(1 \leq i \leq k)$.
   (b) Ist $a \in R$ einfache Nullstelle von $f(x)$, so ist a keine Nullstelle von $f'(x)$.
   (c) Ist $f(a) = f'(a) = ... = f^{(k-1)}(a) = 0, f^{(k)}(a) \neq 0$, so ist a genau k-fache Nullstelle von $f'(x)$.
   (d) Zeige am Beispiel $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[x]$, daß wenn a genau k-fache Nullstelle von $f(x)$ ist, a *nicht* genau $(k-1)$-fache Nullstelle von $f'(x)$ sein muß.

Abgabe:

Donnerstag, 7. 12. 1995